Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică 2007

Etapa finală, Piteşti, 11 aprilie

CLASA A X-A

Subiectul 1. Demonstraţi că ecuaţia $z^n+z+1=0$ are o soluţie complexă de modul 1 dacă şi numai dacă restul împărţirii lui n la 3 este 2.

Subiectul 2. Rezolvaţi ecuaţia $2^{x^2+x}+\log_2 x=2^{x+1}$.

Subiectul 3. Pentru ce numere naturale n, $n\geq 2$, numărul $a_n=(n-1)^{n^{n+1}}+(n+1)^{n^{n-1}}$ este divizibil cu n^n?

Subiectul 4. a) Pentru o mulţime finită de numere naturale S se notează cu $S+S$ mulţimea tuturor sumelor $x+y$ cu $x,y\in S$. Fie $m=|S|$, cardinalul lui S. Arătaţi că

$$|S+S|\leq \frac{m(m+1)}{2}.$$

b) Fie m un număr întreg strict pozitiv. Notăm cu $C(m)$ cel mai mare număr întreg $k\geq 1$, pentru care există o mulţime S, formată din exact m numere întregi, astfel încât $\{1,\cdots,k\}\subseteq S\cup(S+S)$. De exemplu, $C(3)=8$, cu $S=\{1,3,4\}$. Arătaţi că

$$\frac{1}{4}m(m+6)\leq C(m)\leq \frac{1}{2}m(m+3).$$

Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii